INTEGRACIÓN POR PARTES

Algunas integrales que se nos presentan nos resultan un poco complejas, ya por lo general el integrando es el producto de dos funciones. Sin embargo existe un método que permite ir expresando la integral dada en otras que son fáciles de encontrar. Dicho método se conoce como integración por partes.

La técnica de la integración por parte es bastante útil para encontrar integrales complejas llevándolas a integrales más sencillas. Esta técnica se basa en la derivada de un producto. En efecto, debemos recordar que

$$d(UV) = UdV + VdU$$

Realizando un despeje, la expresión nos queda: $d(UV) - VdU = UdV$

Ahora bien, si integramos la igualdad anterior, nos queda

$$\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$$

De manera que obtenemos la igualdad $\int UdV = UV - \int VdU$

donde se supone que la integral de la derecha de la ecuación es sencilla de calcular, o su resultado se obtiene mediante un procedimiento establecido.

CÓMO SE RESUELVE UNA INTEGRAL POR PARTES

Este método consiste en identificar **U** con una parte de la integral y **dV** con el resto, con la pretensión de que al aplicar la fórmula obtenida, la integral del segundo miembro sea más sencilla de obtener que la primera. No hay, y éste es el mayor problema de este procedimiento, una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. La resolución de un buen número de problemas es el mejor camino para adquirir la técnica necesaria.

No obstante, se suelen identificar con **U** las funciones de la forma $\mathbf{x^m}$ si m es positivo; si m es negativo,es preferible identificar con dV a x^m .dx. También suelen identificarse con **U** las funciones ln x, arc sen x, arc tg x y con dV, e^x .dx, sen x dx, cos x dx, etc.

Antes de empezar a practicar este método se ha de tener presente que al hacer la identificación de dv, ésta debe contener siempre a dx.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la integral $\int xe^{2x}dx$

En este caso el exponente de x es positivo (1) , la derivada de *x* es 1 y una primitiva para e^{2x} es fácil de calcular, de modo que hacemos

$$U = x \text{ con lo que } dU = dx$$

$dV = e^{2x}dx$ donde $\int dV = \int e^{2x}dx$ y al realizar la integral se obtiene

$V = \frac{1}{2}e^{2x}$ Entonces aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int xe^{2x}dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la integral $\int Lnxdx$

En este caso aparece únicamente la función logaritmo natural, la derivada de Lnx es conocida por nosotros, luego

$U = Lnx$ con lo que $dU = \frac{1}{x}dx$

$dV = dx$ donde $\int dV = \int dx$ y al realizar la integral se obtiene $V = x$

Entonces aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int Lnxdx = x(Lnx) - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$= xLnx - \int dx$$

$$= xLnx - x + C$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la integral $\int x^3 Ln5x^3 dx$

En esta integral nos aparece un producto entre x^3 y el logaritmo natural de $5x^2$, con el fin de simplificar la integral debemos seleccionar adecuadamente U y dV, para ello se recomienda seleccionar como U la primera función que aparezca en la palabra $ILATE$ haciendo el recorrido de la palabra de izquierda a derecha, siendo

I: funciones **I**nversas Trigonométricas;
L: funciones **L**ogaritmo Neperiano;
A: funciones **A**lgebraicas;
T: funciones **T**rigonométricas;
E: funciones **E**xponenciales.

dV es la atraparte del integrando junto con el diferencial dx

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

En el ejemplo que estamos analizando, el integrando es x^3Ln5x^3 . si hacemos el recorrido por la palabra I**L**ATE, vemos que en la expresión la primera función que aparece en el integrando es $Ln5x^3$, luego debemos llamar:

$U = Ln5x^3$ con lo que $dU = \frac{3}{x}dx$

$dV = x^3dx$ donde $\int dV = \int x^3dx$ y al realizar la integral se obtiene $V = \frac{x^4}{4}$

Entonces aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int x^3Ln5x^3dx = \frac{x^4}{4}\left(Ln5x^3\right) - \int \frac{x^4}{4}\frac{3}{x}dx$$

$$= \frac{x^4Ln5x^3}{4} - \frac{3}{4}\int x^3dx$$

$$= \frac{x^4Ln5x^3}{4} - \frac{3x^4}{16} + C$$

Existen algunas integrales en las cuales, al aplicar la integración por partes se obtiene una expresión idéntica a la integral inicial. Dichas integrales se hacen de la siguiente manera.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la integral $\int e^xCosxdx$

Sea $U = e^x$ con lo que $dU = e^xdx$

$dV = Cosxdx$ donde $\int dV = \int Cosxdx$ y al realizar la integral se obtiene $V = Senx$

Entonces aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int e^x Cosxdx = e^x (Senx) - \int e^x Senxdx$$

Observamos que en el lado derecho de la igualdad, aparece otra integral que se tiene que realizar por partes

Sea $U = e^x$ con lo que $dU = e^x dx$

$dV = Senxdx$ donde $\int dV = \int Senxdx$ y al realizar la integral se obtiene $V = -Cosx$

Entonces aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int e^x Senxdx = e^x (-Cosx) - \int e^x (-Cosx) dx$$

Lo cual nos queda: $\int e^x Senxdx = -e^x Cosx + \int e^x Cosxdx$

Al sustituirlo en la integral inicial se llega:

$$\int e^x Cosxdx = e^x (Senx) - \left(-e^x Cosx + \int e^x Cosxdx \right)$$

Eliminando los signos de agrupación:

$$\int e^x Cosxdx = e^x (Senx) + e^x Cosx - \int e^x Cosxdx$$

En el lado derecho de la igualdad encontramos una integral idéntica a la integral inicial. Transponiendo términos y despejando llagamos a:

$$\int e^x Cosxdx + \int e^x Cosxdx = e^x\left(Senx\right) + e^x Cosx$$

$$2\int e^x Cosxdx = e^x\left(Senx\right) + e^x Cosx$$

$$\int e^x Cosxdx = \frac{e^x\left(Senx\right) + e^x Cosx}{2} + C = \frac{e^x\left(Senx + Cosx\right)}{2} + C$$

ACTIVIDAD. ENCONTRAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES

Hallar las siguientes integrales, utilizando la formula para la integración por parte

$\int x^2 Lnxdx$	$\int x^3 e^{2x} dx$	$\int x\sqrt{x+1}dx$
$\int x^2 Senxdx$	$\int x^2 e^{-3x} dx$	$\int xSec^2 xdx$
$\int xCosxdx$	$\int Tan^{-1} ydy$	$\int \left(x^2 + 3x + 2\right)e^{3x} dx$
$\int e^{ax} Cosbxdx$	$\int Sen^{-1} xdx$	$\int \left(x^2 - 5x\right)e^{x} dx$
$\int \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)Cos2xdx$	$\int e^{3x} Cos4xdx$	$\int ArcTanxdx$
$\int \left(x^2 + 5x + 6\right)Cos2xdx$	$\int x^3 e^{\frac{x}{3}} dx$	$\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x} dx$
$\int \frac{Lnx}{x^3} dx$	$\int x2^{-x} dx$	$\int e^x Senxdx$

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA